جدول انتگرال گیری

فرض کنید $g(x)$ تابعی باشد که n بار مشتق پذیر است و مشتق مرتبه ی $(n+1)$ آن برابر صفر باشد. $g^{(n+1)}(x)=0$ و $f(x)$ تابعی باشد که به راحتی انتگرال پذیر بوده و بتوان آن را $(n+1)$ دفعه انتگرال گیری نمود. حال فرض کنید $F_1(x)$ و $F_2(x)$ و ... و $F_{n+1}(x)$ به ترتیب ضد مشتق (انتگرال) مرتبه اول و دوم و ... و $n+1$ ام تابع $f(x)$ باشند. در این صورت $\int g(x)f(x)dx$ را می توان با جدول زیر محاسبه نمود.

$g(x)$		$f(x)$
	$+$	
$g^{(1)}(x)$		$F_1(x)$
	$-$	
$g^{(2)}(x)$		$F_2(x)$
	$+$	
$\vdots$		
$g^{(n)}(x)$		$F_n(x)$
	$(-1)^n$	
0		$F_{(n+1)}(x)$

$$\int g(x)f(x)dx = g(x)F_1(x) - g^{(1)}(x)F_2(x) + \cdots + (-1)^n g^{(n)}(x)F_{n+1}(x)$$

حل:

① $\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C$

x^2	e^x
$2x$	e^x
2	e^x
0	e^x

② $\int 3x^2 \sin x \, dx = 3\int x^2 \sin x \, dx$

$= 3\left(-x^2 \sin x + 2x \sin x + 2\cos x\right) + C$

x^2	$\sin x$
$2x$	$-\cos x$
2	$-\sin x$
0	$\cos x$

③ $\int x^3 e^{3x} \, dx = \frac{1}{3} x^3 e^{3x} - \frac{3}{9} x^2 e^{3x} + \frac{6x}{27} e^{3x} - \frac{6}{81} e^{3x} + C$

x^3	e^{3x}
$3x^2$	$\frac{1}{3} e^{3x}$
$6x$	$\frac{1}{9} e^{3x}$
6	$\frac{1}{27} e^{3x}$
0	$\frac{1}{81} e^{3x}$

(۴) $\int x^2 \cos 3x \, dx = \frac{1}{3}x^2 \sin 3x - \frac{2}{9}x \cos 3x - \frac{2}{27}\sin 3x + C$

x^2	$\cos 3x$
$2x$	$+\frac{1}{3}\sin 3x$
2	$-\frac{1}{9}\cos 3x$
0	$-\frac{1}{27}\sin 3x$

جدول انتگرال گیری یک خطی

در این روش نمی توان از جدول انتگرال گیری معمولی استفاده نمود زیرا امکان دارد یکی از توابع به راحتی انتگرال پذیر نبوده یا مشتق گیری به صفر نرسد. پس از جدول انتگرال گیری یک خطی برای حل انتگرال استفاده می کنیم.

$g(x)$	$f(x)$
$g'(x)$	$F_1(x)$
$\int$	

$$\int g(x) f(x)\, dx = g(x)F_1(x) - \int g'(x) F_1(x)\, dx$$

حل،

① $\int x \ln x \, dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2} dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x} dx$

$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right) + C$

$\ln x$	x
$\frac{1}{x}$	$\frac{x^2}{2}$

$\int \xrightarrow{-}$

② $\int \mathrm{Arctan}\, x \, dx = x\,\mathrm{Arctan}\, x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x\,\mathrm{Arctan}\, x - \left(\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right) + C$

$\mathrm{Arctan}\, x$	1
$\frac{1}{1+x^2}$	x

$\int \xrightarrow{-}$

$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2}\int \frac{\overbrace{2x\,dx}^{du}}{\underbrace{1+x^2}_{u}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}(\ln|u|) + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$

$1 + x^2 = u \longrightarrow 2x\,dx = du$

(۳) $\int \ln x\,dx = x\ln x - \int \frac{1}{x}\, x\,dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + c$

$\ln x$	$+\,1$
$\frac{1}{x}$	x
$\int$	$-$

جدول انتگرال گیری دوخطی

درحل برخی از انتگرال ها مشاهده می شود که پس از انجام عملیات مضربی از انتگرال اولیه در مسئله مشاهده می شود . در این موارد می توان از جدول انتگرال گیری دوخطی استفاده نمود .

$g(x)$	$f(x)$
$g'(x)$	$+\ F_1(x)$
$g''(x)$	$-\ F_2(x)$
$\int$	$+$

$$\int g(x) f(x)\,dx = g(x)F_1(x) - g'(x)F_2(x) + \int g''(x)F_2(x)\,dx$$

$$\underbrace{\int e^x \cos x\,dx}_{A} = e^x \sin x + e^x \cos x - \underbrace{\int e^x \cos x\,dx}_{A}$$

e^x	$+\cos x$
e^x	$\sin x$
e^x	$-\cos x$
$\int$	$+$

$$A = e^x \sin x + e^x \cos x - A \rightsquigarrow A + A = e^x \sin x + e^x \cos x \rightsquigarrow 2A = e^x \sin x + e^x \cos x$$

$$A = \frac{1}{2}(e^x \sin x + e^x \cos x) + C$$

$$\underbrace{\int e^{2x} \sin 3x\,dx}_{A} = -\frac{1}{3} e^{2x} \cos 3x + \frac{2}{9} e^{2x} \sin 3x - \frac{4}{9} \underbrace{\int e^{2x} \sin 3x\,dx}_{A}$$

e^{2x}	$+\sin 3x$
$2e^{2x}$	$-\frac{1}{3}\cos 3x$
$4e^{2x}$	$-\frac{1}{9}\sin 3x$
$\int$	$+$

$$A + \frac{4}{9} A = -\frac{1}{3} e^{2x} \cos 3x + \frac{2}{9} e^{2x} \sin 3x \rightsquigarrow \frac{13}{9} A = -\frac{1}{3} e^{2x} \cos 3x + \frac{2}{9} e^{2x} \sin 3x$$

$$A = \frac{9}{13}\left(-\frac{1}{3} e^{2x} \cos 3x + \frac{2}{9} e^{2x} \sin 3x\right) + C$$

$$\underbrace{\int e^{x}\cos x\,dx}_{A} = e^{x}\sin x + e^{x}\cos x - \underbrace{\int e^{x}\cos x\,dx}_{A}$$

$$\begin{array}{c|c} e^{x} & \cos x \\ \hline e^{x} & \sin x \\ e^{x} & -\cos x \\ \hline \int & + \end{array}$$

$$A = e^{x}\sin x + e^{x}\cos x - A \rightarrow A + A = e^{x}\sin x + e^{x}\cos x \rightsquigarrow 2A = e^{x}\sin x + e^{x}\cos x$$

$$A = \frac{1}{2}\left(e^{x}\sin x + e^{x}\cos x\right) + C$$

$$\underbrace{\int e^{2x}\sin 3x\,dx}_{A} = -\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{9}e^{2x}\sin 3x - \frac{4}{9}\underbrace{\int e^{2x}\sin 3x\,dx}_{A}$$

$$\begin{array}{c|c} e^{2x} & \sin 3x \\ \hline 2e^{2x} & -\frac{1}{3}\cos 3x \\ 4e^{2x} & -\frac{1}{9}\sin 3x \\ \hline \int & + \end{array}$$

$$A + \frac{4}{9}A = -\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{9}e^{2x}\sin 3x \rightsquigarrow \frac{13}{9}A = -\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{9}e^{2x}\sin 3x$$

$$A = \frac{9}{13}\left(-\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{9}e^{2x}\sin 3x\right) + C$$